

# לומדים: הקסם של סדרת פיבונאצ'י

שכבת גיל

חטיבת ביניים

## תקציר הפעילות

פעילות זו מתאימה להעמקה של נושא סדרות וחוקיות שנלמד במהלך השנים בחטיבת הביניים וחטיבה עליונה. בפעילות זו התלמידים יחשפו לסדרת פיבונאצ'י. הם ילמדו על הייחודיות של מספרים אלה ועל דרכים שונות למציאתם. כמו כן התלמידים יבצעו פעילות ויצפו בסרטון, ובהם יגלו מגוון חוקים המסתתרים בסדרת פיבונאצ'י. הלמידה תהיה כיתתית, תוך כדי ביצוע המשימות בזוגות או ביחידים.

## משך הפעילות

שני שיעורים

## מטרות הפעילות

- להרחיב את נושאי סדרות וחוקיות לדרכים שונות להצגת אותה חוקיות.
- לפתח יכולת הכללה.
- להעשיר את הידיעות לגבי הקשר בין תופעות טבע ובין סדרות באלגברה.

## מושגים מתוכנית הלימודים

מתמטיקה, אלגברה, סדרות, פיבונאצ'י, ספירלה, חתך הזהב, יחס הזהב

## מיומנויות

חשיבה ביקורתית, שאילת שאלות, ניתוח נתונים והסקת מסקנות, רישום תצפיות

## אופי הלמידה

יחידים, זוגות, כיתתי

## סוג הפעילות

פעילות להקניית הנושא

## קישור לסרטונים וכתבות

כל אחד מהסרטונים הבאים:

- "סרטון הרצאה על מספרי פיבונאצ'י": <https://bit.ly/T7VCQP>
- "סרטון על סדרת הארנבים": <https://bit.ly/2GTK8hr>
- "סרטון 'משהו שלמדתי היום' על סדרת פיבונאצ'י": <https://bit.ly/2ACQRXx>

## הכנות לקראת הפעילות

- יש לדאוג למקרן ולצילום דפים לתלמידים.

# מה עושים?



פיבונאצ'י (מתוך: ויקיפדיה)

ליאונרדו פיבונאצ'י (משמעות שמו: "הבן של בונאצ'י") מהעיר פיזה, היה מגדולי המתמטיקאים האירופאיים בימי הביניים. הוא חי משנת 1170 בערך עד 1240 והיה תלמיד סקרן ומשקיע. אביו היה סוחר עשיר, שנהג לקחת אותו למסעותיו בעולם הערבי. שם התרשם הבן מהקלות שבה מחשבים הסוחרים את חשבונותיהם בעזרת שיטת הספירה העשרונית. באותם ימים עדיין השתמשו באירופה בשיטת הספירה הרומאית, שהייתה מסורבלת.

1. חשבו את תוצאות הפעולות הבאות:

א.  $XI = IV + VII$

ב.  $-I = VIII - IX$

ג.  $VI = II * III$

אפשר לשמוע הצעות מן התלמידים כיצד ביצעו את החישובים השונים בשפה מתמטית זו הקשה לשימוש, תוך שהם משתפים ולתת ביטוי לקשיים בביצוע פעולות עם הספרות הרומיות. כיתות שאינן בקיאות בסימונים יכולות לקרוא תחילה הסברים בקישור הבא: <https://bit.ly/2PE9aBC>

פיבונאצ'י היה הראשון לייבא לאירופה את שיטת הספירה העשרונית שבה אנו משתמשים עד היום, ותיאר אותה בספרו החשוב "ספר החישובים". באותו ספר הציג פיבונאצ'י חידה:

**זוג ארנבים ממליט כל חודש זוג ארנבים חדש. כל זוג ארנבים מתחיל להיות פורה החל מהחודש השני. אם מתחילים מזוג צעיר אחד, כמה זוגות של ארנבים יהיו במשפחה אחרי שנה?**

2. האם מצב כזה של התרבות הוא אפשרי במציאות? מאילו גורמים התעלם כותב החידה? מדוע לדעתכם עשה זאת?

התלמידים יענו על חלק זה בזוגות. יש להתייחס להנחות שעומדות בבסיס החידה, כמו קיום מזון מספיק, היעדר טורפים (ובכלל – מוות של פרטים), התרבות בכל חודש ולא רק בתקופות מסוימות בשנה, מוטציות גנטיות בגלל התרבות בין קרובי משפחה, ועוד.

כדי לענות על החידה של פיבונאצ'י, ננסה לספור כמה **זוגות** ארנבים יהיו בכל חודש, החל מהחודש הראשון שבו התקבל לראשונה זוג הארנבים הראשון בחידה.

3. מלאו את הטבלה הבאה:

החודש	איורים, הערות	סה"כ מספר זוגות ארנבים
1		1
2		1
3		2
4		3
5		5
6		8
7		13
8		21

תשובות: עמודת ה"איורים והערות" נועדה לכך שתלמידים יסמנו את התרבות הארנבים כפי שמתואר בטבלה בעמוד הבא. בעמודה של "סה"כ מספר זוגות ארנבים" יש צורך שיופיע מספר זוגות הארנבים בכל שלב לפי סדרת פיבונאצ'י: 1,1,2,3,5,8,13,21.

4. התבוננו באיברי הסדרה שהתקבלו בטור השמאלי.

א. האם תוכלו לשים לב לחוקיות מסוימת? פרטו.

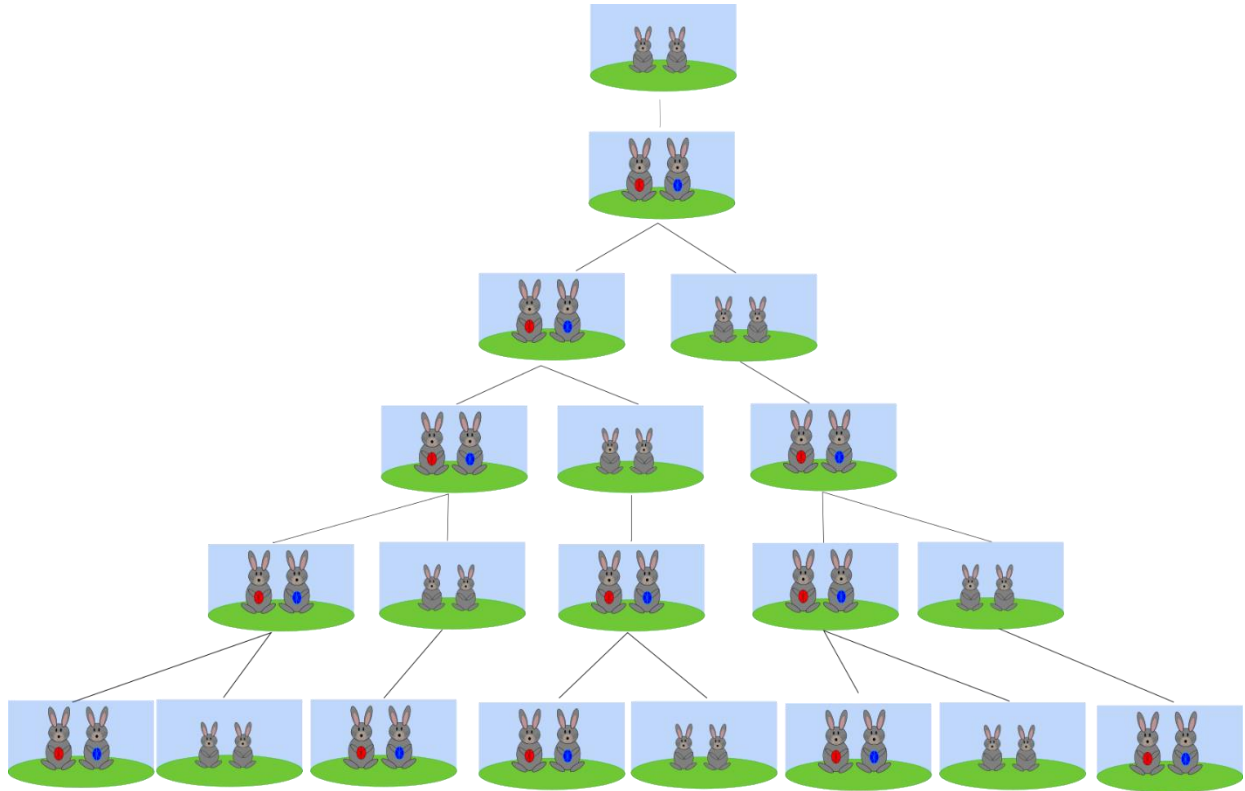
כל איבר (החל מהאיבר השלישי) הוא סכום שני האיברים שהיו לפניו.

ב. לפי חוקיות זו, מה יהיה האיבר ה-9 בסדרה?  $34=21+13$

ג. מהם 12 האיברים הראשונים בסדרת פיבונאצ'י? חשבו בהתאם לחוקיות שמצאתם.

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,14

## למורה להצגה על הלוח:



התמונה לקוחה מויקיפדיה:

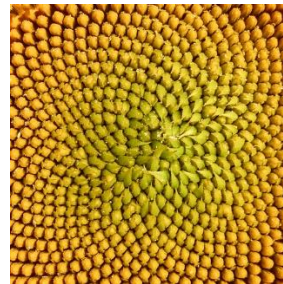
By Ein\_Hase\_mit\_blauem\_Ei.svg: MichaelFrey & Sundance Raphael derivative work: HB (talk)  
- Ein\_Hase\_mit\_blauem\_Ei.svg, CC BY-SA 3.0

- צפו בכיתה בסרטון <https://bit.ly/2GTK8hr>, המסכם את נושא סדרת הארנבים.

סדרה זו מיוחדת בכך שמלבד תיאור התרבותם של ארנבים, היא מופיעה במגוון רחב של תופעות בטבע ובחיי היום-יום, שלכאורה אין קשר ביניהן.

5. בתמונה שלפניכם מופיע פרח של חרצית לבנה. חפשו במקורות מידע מה הקשר בינו (או בין פרח החמנייה למשל) ובין סדרת פיבונאצ'י.

למשל העובדה שמספר עלי הכותרת בצמחים רבים הוא תמיד מספר פיבונאצ'י, כמו 5, 8, 13 וכדומה. כמו כן, מספר הגרעינים בספירלות שבפרח החמנייה הוא מספרי פיבונאצ'י עוקבים.



לקוח מתוך: shutterstock

6. ילד משחק תוך כדי טיפוס במדרגות: בכל פעם הוא מטפס מדרגה אחת או שתיים לפי בחירתו.
- אם ישנה רק מדרגה אחת, אזי יש לו רק אפשרות אחת לטפס.
  - אם ישנן 2 מדרגות, הוא יכול לטפס אותן: אחת-אחת או שתיים יחד: סך הכול שתי אפשרויות.
  - אם ישנן 3 מדרגות, הוא יכול לטפס כל פעם אחת, או אחת ואז שתיים יחד, או שתיים יחד ואז אחת - סך הכול שלוש אפשרויות.
- תארו את האפשרויות השונות בטיפוס 4 מדרגות.  $(1,1,1,1)$   $(1,1,2)$   $(1,2,1)$   $(2,1,1)$   $(2,2)$  סה"כ 5 אפשרויות. אם נמשיך הלאה נגלה שמתקבלת סדרת פיבונאצ'י.

ישנן עוד תופעות רבות שמסתתרות בסדרת פיבונאצ'י, כפי שניתן להתרשם בסרטון הבא:  
<https://bit.ly/T7VCQP>  
בשאלות 7-8 ננסה לחקור שתי תופעות המתרחשות במספרי פיבונאצ'י.

7. א. חברו את ארבעת האיברים הראשונים בסדרת פיבונאצ'י:  $1+1+2+3=7$   
מה ההפרש בין סכום זה לבין האיבר ה-6 בסדרה (שאותו מצאתם לעיל)?
- ב. חברו את שבעת האיברים הראשונים בסדרת פיבונאצ'י:  $1+1+2+3+5+8+13=33$   
מה ההפרש בין סכום זה לבין האיבר ה-9 בסדרה (שאותו מצאתם לעיל)?
- ג. איזה כלל מצאנו לגבי סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרת פיבונאצ'י?  
**סכום  $n$  האיברים הראשונים בסדרת פיבונאצ'י קטן ב-1 מהאיבר במקום ה- $n+2$ .**
- ד. מהו סכום 10 האיברים הראשונים בסדרת פיבונאצ'י לפי כלל זה?  
 $1+1+2+3+5+8+13+21+34+55=143$   
מצאנו בשאלה 4 שהאיבר ה-12 הוא 144  
ולכן סכום 10 האיברים הראשונים הוא  $143 = 144 - 1$

8. חשבו את היחס בין כל זוג איברים סמוכים של סדרת פיבונאצ'י (בין הגדול לקטן). שימו לב לרשום את התשובה עד 4 ספרות לאחר הנקודה:
- א. היחס בין שני האיברים הראשונים:  $1:1 = \underline{\hspace{2cm}}$
- ב. בין האיבר השלישי לאיבר השני:  $2:1 = \underline{\hspace{2cm}}$
- ג. בין האיבר הרביעי לשלישי:  $\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
- ד. בין האיבר ה-5 לרביעי:  $\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
- ה. בין האיבר ה-6 ל-5:  $\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
- ו. בין האיבר ה-7 ל-6:  $\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

- ז. בין האיבר ה \_\_\_\_\_ ל \_\_\_\_\_: \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_
- ח. בין האיבר ה \_\_\_\_\_ ל \_\_\_\_\_: \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_
- ט. בין האיבר ה \_\_\_\_\_ ל \_\_\_\_\_: \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_
- י. בין האיבר ה \_\_\_\_\_ ל \_\_\_\_\_: \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

\* סביב איזה מספר נעות התוצאות שקיבלתם (כתבו עד 4 ספרות לאחר הנקודה)?

למספר זה קוראים "יחס הזהב":

1.61803398874989488.....

$\Phi$

נהוג לסמן מספר זה באות 'פ' (ללא דגש באות פ). המספר היה מוכר עוד מלפני פיבונאצ'י. המתמטיקאים שמו לב אליו כבר לפני יותר מ-2,000 שנים, ומאז חזר והופיע בהקשרים ותחומים רבים, כפי שחווינו מעט בפעילות זו.

לסיכום הפעילות צפו בסרטון "משהו שלמדתי היום" המסכם את נושא סדרת פיבונאצ'י:

<https://bit.ly/2ACQRXx>